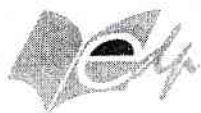


prof. gr. I MARIUS DRĂGAN
prof. gr. I I. V. MAFTEI
prof. dr. SORIN RĂDULESCU

INEGALITĂȚI MATEMATICE (Extinderi și generalizări)

**Tehnici și metode
de demonstrație și rafinare**



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.

CUPRINS

Prefață	3
<i>Capitolul 1</i>	
IDENTITĂȚI ÎNTR-UN TRIUNGHI	7
1.1. Identități într-un triunghi	7
1.2. Aplicații la obținerea unor inegalități într-un triunghi	14
<i>Capitolul 2</i>	
INEGALITATEA LESSELS-PELLING ȘI RAFINAREA EI	31
2.1. Inegalitatea Lessels-Pelling	31
2.2. Rafinarea inegalității Lessels-Pelling	36
2.3. Câteva extinderi ale inegalității Lessels-Pelling	38
<i>Capitolul 3</i>	
O METODĂ TRIGONOMETRICĂ UNITARĂ DE DEMONSTRARE A UNOR INEGALITĂȚI GEOMETRICE CLASICE ÎNTR-UN TRIUNGHI	40
<i>Capitolul 4</i>	
TEOREMA ERDÖS-MORDELL ÎNTR-UN TRIUNGHI	45
<i>Capitolul 5</i>	
FUNCȚII CONVEXE SCHUR	57
<i>Capitolul 6</i>	
DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI DE TIP SIMETRIC ÎN DOUĂ ȘI TREI VARIABILE	66
6.1. Demonstrarea unor inegalități cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale în două variabile	66
6.2. Demonstrarea unor inegalități cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale în trei variabile	76
<i>Capitolul 7</i>	
INEGALITĂȚI STABILITE CU AJUTORUL UNOR TRIUNGHIURI SPECIALE	88
7.1. Proprietăți în triunghiul ce are vârfurile în punctele de intersecție ale bisectoarelor exterioare	88

7.2. Studiul triunghiului cu lungimile laturilor \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{c}	99
7.3. Triunghiul determinat de medianele unui triunghi	108
7.4. Triunghiul determinat de două laturi și dublul medianei ce pornește din același vârf cu laturile	111
7.5. Triunghiul cu unghiurile $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$, unde A , B , C sunt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic.....	113
7.6. Triunghiul cu unghiurile $\frac{\pi - A}{2}$, $\frac{\pi - B}{2}$, $\frac{\pi - C}{2}$	118
7.7. Studiul triunghiului cu vârfurile în O , I , H	120

Capitolul 8

INEGALITĂȚI CU LUNGIMILE MEDIANELOR ÎNTR-UN TRIUNGHII	127
8.1. Rafinări de tip rațional ale inegalității $m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$	127
8.2. Alte inegalități cu lungimile medianelor ce rezultă din calculul distanței GI în triunghiul ABC	130

Capitolul 9

TEOREMA LUI BLUNDON ȘI CÂTEVA CONSECINȚE IMPORTANTE	135
9.1. Câteva consecințe ale inegalității Blundon.....	135
9.2. Rafinări ale teoremei Weisenbock și Hadwiger-Finsler	141
9.3. Inegalități cu radicali în geometria triunghiului	143
9.4. Reversul inegalității Hadwiger-Finsler în triunghiul ascuțitunghic	148
9.5. O demonstrație inedită a inegalității Blundon	150
9.6. Rafinări de tip rațional ale inegalității Gerretsen	153

Capitolul 10

CÂTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA INEGALITĂȚII RĂDULESCU-MAFTEI	159
---	-----

Bibliografie	166
---------------------------	-----

Capitolul 1

IDENTITĂȚI ÎNTR-UN TRIUNGHI

Aceste identități sunt de o mare importanță. Ele pot fi de folos în rezolvarea unor probleme de geometrie și trigonometrie din manualele școlare și pregătirii elevilor pentru performanță matematică.

1.1. Identități într-un triunghi

Aplicații

Să se demonstreze următoarele relații:

$$1) \sum ab = p^2 + r^2 + 4Rr;$$

$$2) \sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr);$$

$$3) \sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr);$$

$$4) \sum \sin A \sin B = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2};$$

$$5) \sum \cos A \cos B = \frac{p^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2};$$

$$6) \sum \cos A = \frac{R+r}{R};$$

$$7) \sum \sin A = \frac{p}{R};$$

$$8) \sum \frac{\cos A}{a} = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{4Rrp} = \frac{\sum a^2}{8Rrp};$$

$$9) \sum \cos^2 \frac{A-B}{2} = \frac{p^2 + 4R^2 + 2Rr + r^2}{4R^2};$$

$$10) \sum \sin^2 \frac{A-B}{2} = \frac{8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2}{4R^2};$$

$$11) \sum \cos(A-B) = \frac{p^2 - 2R^2 + 2Rr + r^2}{2R^2};$$

$$12) \sum \frac{m_a^2}{bc} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr};$$

$$13) \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2(2R - r);$$

$$14) \sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1;$$

$$15) \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1;$$

$$16) \text{ a) } \prod \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{4R};$$

$$\text{ b) } \prod \cos \frac{A}{2} = \frac{p}{4R};$$

$$17) \prod \sin \frac{A-B}{2} = \frac{\prod(a-b)}{16R^2r};$$

$$18) \prod \cos \frac{A-B}{2} = \frac{p^2 + 2Rr + r^2}{8R^2};$$

$$19) \sum m_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$20) \sum \frac{a}{b+c-a} = 2\frac{R}{r} - 1;$$

$$21) \sum a \cos A = \frac{2pr}{R};$$

$$22) \cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - 4Rr - r^2 - 4R^2}{4R^2};$$

$$23) \prod(a-b)^2 = 4r^2[-p^4 + 2(10Rr + 2R^2 - r^2)p^2 - r(4R+r)^3];$$

$$24) \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p};$$

$$25) \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p};$$

$$26) \sum \sin 2A = \frac{2pr}{R^2};$$

$$27) \sum a^2 = \sum(a-b)^2 + 4S \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$28) \sum \operatorname{tg} A = \frac{2pr}{p^2 - 4Rr - r^2 - 4R^2};$$

$$29) \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r};$$

$$30) \sum \operatorname{ctg} A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2rp} = \frac{\sum a^2}{4rp};$$

$$31) \Pi \sin A = \frac{S}{2R^2};$$

$$32) \sum \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - 4Rr - r^2 - 4R^2};$$

$$33) \Pi \operatorname{ctg} A = \frac{p^2 - 4Rr - r^2 - 4R^2}{2pr};$$

$$34) (4m_a m_b m_c)^2 = p^6 + (33r^2 - 12Rr)p^4 - (33r^4 + 60R^2 r^2 - 120Rr^3)p^2 - (r^2 + 4Rr)^3;$$

$$35) 3abc - \sum a^2(b+c-a) = 4S(R-2r);$$

$$36) \sum \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{p^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2}{4Rp};$$

$$37) \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1 - \frac{2r(4R+r)}{p^2};$$

$$38) \sum \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{B}{2} = 1 - \frac{12Rr}{p^2};$$

$$39) \sum \operatorname{tg}^4 \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{B}{2} = 1 + \frac{2r^2(4R+r)^2}{p^4} - \frac{16Rr}{p^2};$$

$$40) \sum \operatorname{tg}^5 \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}^5 \frac{B}{2} = 1 + \frac{20Rr(4R+r)^2}{p^4} - \frac{20Rr}{p^2};$$

$$41) \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(4R+r)^2}{p^2} - 2;$$

$$42) \sum \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} = \frac{(4R+r)^3}{p^3} - \frac{12R}{p};$$

$$43) \sum \operatorname{tg}^4 \frac{A}{2} = 2 - \frac{16R(4R+r)}{p^2} + \frac{(4R+r)^4}{p^4}.$$

1) Considerăm identitatea:

$$(x - a)(x - b) = x^3 - \sum ax^2 + \sum abx - abc, (\forall) x \in \mathbb{R};$$

Pentru $x = p$ vom obține:

$$(p - a)(p - b)(p - c) = -p^3 + p\sum ab - 4Rrp, \text{ iar din formula lui Heron:}$$

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \text{ rezultă: } \frac{S^2}{p} = -p^3 + p\sum ab - 4Rrp.$$

Efectuând calculele, în final vom obține: $\sum ab = p^2 + r^2 + 4Rr$.

$$2) \sum a^2 = (\sum a)^2 - 2\sum ab = 4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

3) În egalitatea de la afirmația 1), punând $x = a, x = b, x = c$, prin însumare, obținem: $\sum a^3 - 2p\sum a^2 + 2p\sum ab - 3abc = 0$.

Rezultă:

$$\sum a^3 = 2p(\sum a^2 - \sum ab + 6Rr) = 2p(2p^2 - 2r^2 - 8Rr - p^2 - r^2 - 4Rr + 6Rr) \text{ sau}$$

$$\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

4) Rezultă din teorema sinusurilor și afirmația 1).

$$5) \sum \cos(A + B) = \sum \cos A \cos B - \sum \sin A \sin B.$$

Rezultă: $\sum \cos A \cos B = \sum \sin A \sin B - \sum \cos A$.

$$\text{Dar } \sum \cos A = \frac{1}{2} \sum \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2a^2}{bc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \sum \frac{1}{bc} - \sum \frac{a^2}{bc} =$$

$$= \frac{p\sum a^2}{4Rrp} - \frac{\sum a^3}{4Rrp} = \frac{2p(p^2 - r^2 - 4Rr) - 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{4Rrp} = \frac{2r^2 + 2Rr}{2Rr} = \frac{R + r}{R}.$$

Utilizând și afirmația 4) rezultă:

$$\sum \cos A \cos B = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} - \frac{R}{r} = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}.$$

7) Rezultă din teorema sinusurilor.

$$8) \text{ Avem: } \sum \frac{\cos A}{a} = \sum \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2abc} = \frac{1}{8pRr} \sum a^2 = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{4Rr}.$$

$$9) \sum \cos^2 \frac{A - B}{2} = \sum \frac{1 + \cos(A - B)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\sum \cos A \cos B + \sum \sin A \sin B) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \right) = \frac{12R^2 + 2p^2 + 2r^2 + 4Rr - 4R^2}{4R^2} =$$

$$= \frac{p^2 + 4R^2 + 2Rr + r^2}{4R^2}.$$

$$10) \sum \sin^2 \frac{A-B}{2} = 3 - \sum \cos^2 \frac{A-B}{2} = \frac{8r^2 - 2Rr - r^2 - p^2}{4R^2}, \text{ unde } \sum \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

rezultă din afirmația 9).

$$11) \sum \cos(A-B) = \sum \cos A \cos B + \sum \sin A \sin B = \frac{p^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2} + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} =$$

$$= \frac{p^2 + 2R^2 + 2Rr + r^2}{2R^2}.$$

$$12) \sum \frac{m_a^2}{bc} = \sum \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4bc} = \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} + \sum \frac{b^2 + c^2}{4bc} =$$

$$= \sum \frac{bc \cos A}{2bc} + \sum \frac{b^2 + c^2}{4bc} = \frac{1}{2} \sum \cos A + \frac{1}{4} \sum \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R+r}{R} + \frac{1}{4} \left[(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3 \right] = \frac{2r-R}{4R} + \frac{p(ab+bc+ca)}{2abc} =$$

$$= \frac{2r-R}{4R} + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{8Rr} = \frac{p^2 + 5r^2 + 2Rr}{8Rr}.$$

$$13) \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sum a \frac{r}{p-a} = r \sum \frac{a}{p-a} = r \frac{\sum a(p-b)(p-c)}{pr^2} = \frac{1}{S} \{ a[p^2 - (b+c)p + bc] \} =$$

$$= \frac{1}{S} [2p^3 - 2p(p^2 + r^2 + 4Rr) + 12Rrp] = 2(2R-r).$$

$$14) \sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = \sum \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\sum \operatorname{tg} A}{\prod \operatorname{tg} A} = 1.$$

Dar din afirmațiile 28) și 33) rezultă cerința.

$$15) \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sum \frac{r^2}{(p-b)(p-a)} = r^2 \frac{(3p-2p)p}{S^2} = \frac{r^2 p^2}{S^2} = 1.$$

$$16) \prod \sin \frac{A}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{r}{4R}.$$

$$17) \prod \sin \frac{A-B}{2} = \prod \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \right) =$$

$$= \prod \left(\frac{p-c}{c} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} - \frac{p-a}{c} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \right) =$$

$$= \frac{pS}{(abc)^2} \prod (a-b) = \frac{pS}{16R^2 S^2} \prod (a-b) = \frac{1}{16R^2 r} \prod (a-b) = \frac{\prod (a-b)}{16R^2 r}.$$

$$\begin{aligned}
 18) \Pi \cos \frac{A-B}{2} &= \Pi \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2} \right) = \Pi \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right) = \\
 &= \Pi \left(\frac{p}{c} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} + \frac{p-c}{c} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \right) = \Pi \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \Pi \frac{2p-c}{c} = \\
 &= \frac{S^2}{p^4 RS} \frac{\Pi(2p-c)}{4RS} = \frac{\Pi(2p-c)}{16R^2 p} = \frac{8p^3 - 8p^3 \sum ab - abc}{16R^2 p} = \\
 &= \frac{2p(p^2 + r^2 + 4Rrp) - 4Rrp}{16R^2 p} = \frac{p^2 + 2Rr + r^2}{8R^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) \sum \frac{a}{b+c-a} &= \frac{1}{2} \sum \frac{a}{p-a} = \frac{1}{2} \frac{\sum a(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} \frac{\sum a[p^2 - (b+c)p + bc]}{S^2} = \\
 &= \frac{p[2p^3 - 2p \sum ab + 3abc]}{2S^2} = \frac{p(4RS - 2rS)}{2S^2} = \frac{2p(2R-r)}{2pr} = \frac{2R-r}{r} = 2\frac{R}{r} - 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21) \sum a \cos A &= \frac{\sum a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc} = \frac{2\sum a^2 b^2 - \sum a^4}{2abc} = \frac{4\sum a^2 b^2 - \sum a^4}{2abc} = \\
 &= \frac{4[(\sum ab)^2 - 2abc \sum a] - (\sum a^2)^2}{2abc} = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16Rrp^2 - (p^2 - r^2 - 4Rrp)^2}{2Rrp} = \\
 &= \frac{4p^2 r(r+4R) - 16Rrp^2}{2Rrp} = \frac{2pr}{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22) \sum \cos A \cos B \cos C &= \frac{\Pi(b^2 + c^2 - a^2)}{8a^2 b^2 c^2} = \frac{\Pi(x - 2a^2)}{8a^2 b^2 c^2} = \\
 &= \frac{x^3 - 2\sum a^2 x^2 + \sum a^2 b^2 x - 8a^2 b^2 c^2}{8a^2 b^2 c^2} = \\
 &= \frac{-8(p^2 - r^2 - 4Rr)^3 + 8(p^2 - r^2 - 4Rr) \left[(p^2 - r^2 - 4Rr)^2 - 4abc p \right] - 8a^2 b^2 c^2}{8a^2 b^2 c^2} = \\
 &= \frac{8(p^2 - r^2 - 4Rr) \left[(p^2 - r^2 - 4Rr)^2 - (p^2 - r^2 - 4Rr)^2 - 4abc p \right] - 8a^2 b^2 c^2}{8a^2 b^2 c^2} = \\
 &= \frac{8(p^2 - r^2 - 4Rr) [4(r^2 + 4Rr)p^2 - 16Rrp^2] - 8a^2 b^2 c^2}{8a^2 b^2 c^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{8(p^2 - r^2 - 4Rr)4rp^2(r^2 + 4R - 4R) - 8 \cdot 16R^2 r^2 p^2}{8 \cdot 16R^2 r^2 p^2} = \frac{8(p^2 - r^2 - 4Rr) - 32R^2}{32R^2} =$$

$$= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr - 4R^2}{32R^2}.$$

$$23) \Pi(a-b)^2 = 4r^2[-p^4 + 2(10Rr + 2R^2 - r^2)p^2 - r(4R + r)].$$

Considerăm identitatea:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2px + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Deoarece: } f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b),$$

$$\text{notăm: } \alpha = p^2 + r^2 + 4Rr, \Delta = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -f'(a)f'(b)f'(c).$$

$$\text{Rezultă: } \Delta = -(3a^2 - 4ap + \alpha)(3b^2 - 4bp + \alpha)(3c^2 - 4cp + \alpha).$$

$$\text{Notăm: } x_1 = 3a^2 - 4ap; x_2 = 3b^2 - 4ap; x_3 = 3c^2 - 4ap.$$

$$\text{Deci: } \Delta = -(\alpha + x_1)(\alpha + x_2)(\alpha + x_3) = -\alpha^3 + (x_1 + x_2 + x_3)\alpha -$$

$$-(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\alpha - x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 =$$

$$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 4p(a + b + c) = 6(p^2 - r^2 - 4Rr) - 8p^2 =$$

$$= -2p^2 - 6r^2 - 24Rr + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \Sigma(3a^2 - 4ap)(3b^2 - 4bp) =$$

$$= 9\Sigma a^2b^2 - 12p\Sigma(a^2b + ab^2) + 16p^2\Sigma abc.$$

$$\text{Dar: } \Sigma(a^2b + ab^2) = \Sigma ab(a + b) = \Sigma ab(2p - c) = 2p\Sigma ab - 3abc =$$

$$= 2p(p^2 + r^2 + 4Rr) - 12Rrp = 2p(p^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr) = 2p(p^2 + r^2 - 2Rr).$$

$$\text{Dar: } \Sigma a^2b^2 = (\Sigma ab)^2 - 16Rrp,$$

$$\Sigma x_1x_2 = 9(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 144Rrp^2 - 24p^2(p^2 + r^2 - 2Rr) + 16p^2(p^2 + r^2 + 4Rr) =$$

$$= 9(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 + 8p^2(2p^2 + 2r^2 + 8Rr - 3p^2 - 3r^2 + 6Rr - 18Rr) =$$

$$= 9(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 + 8p^2(-p^2 - r^2 - 4Rr) = (p^2 + r^2 + 4Rr)(p^2 + 9r^2 + 36Rr);$$

$$x_1x_2x_3 = -abc(4p - 3a)(4p - 3b)(4p - 3c) =$$

$$= -4Rrp[64p^3 - 6p \cdot 16p^2 + 36p(p^2 + r^2 + 4Rr) - 27 \cdot 4Rrp] =$$

$$= -4Rrp[-32p^3 + 36p(p^2 + r^2 + 4Rr) - 108Rrp].$$

$$\text{Rezultă: } \Delta = -(p^2 + r^2 + 4Rr)^3 + (2p^2 + 6r^2 + 24Rr)(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 -$$

$$-(p^2 + 9r^2 + 36Rr)(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 + 16Rrp^2(p^2 + 9r^2 + 9Rr) =$$

$$= (p^2 + r^2 + 4Rr)^2(-p^2 - r^2 - 4Rr + 2p^2 + 6r^2 + 24Rr - p^2 - 9r^2 - 36Rr) =$$

$$= (-4r^2 - 16Rr)(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 + 16Rrp^2(p^2 + 9r^2 + 9Rr).$$

Notăm $p^2 = u$. $\Delta = 4r[4Ru(u + 9r^2 + 9Rr) - (r + 4R)(u + r^2 + 4Rr)^2] =$
 $= 4r[4Ru^2 + (36Rr^2 + 36R^2r)u - (r + 4R)u^2 - (r + 4R)u \cdot (2r^2 + 8Rr) -$
 $- (r + 4R)(r^4 + 16R^2r^2 + 8Rr^3) = 4r[-u^2 + 2(10Rr + 2R^2 - r^2)u - r(r + 4R)^3] =$
 $= 4r^2[-p^4 + 2(10Rr + 2R^2 - r^2)p^2 - r(4R + r)^3]$

$$24) \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sum \frac{r}{p-a} = r \frac{(p-a)(p-b)}{\frac{S^2}{p}} = \frac{3p^2 - 4p^2 + \sum ab}{S} = \frac{-p^2 + r^2 + 4Rr + p^2}{S} =$$

$$= \frac{r(4R+r)}{S} = \frac{4R+r}{p}.$$

$$25) \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r^3}{\frac{S^2}{p}} = \frac{r}{p}.$$

26) Din identitatea 21) rezultă: $\sum a \cos A = \frac{2pr}{R}$ sau $\sum 2R \sin A \cos A = \frac{2pr}{R}$

echivalentă cu $\sum \sin 2A = \frac{2pr}{R^2}$.

27) Relația se mai scrie sub forma: $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2\sum ab - \sum a^2}{4S}$. Folosind punctele 1)

și 2) va rezulta: $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}$, adică afirmația 24).

$$28) \sum \operatorname{tg} A = \sum \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{2R} \sum \frac{a}{\cos A} = \frac{1}{2R} \sum \frac{2abc}{b^2 + c^2 - a^2} = 4S \sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} =$$

$$= \frac{4S \sum (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{\prod (b^2 + c^2 - a^2)} = \frac{S \sum [a^4 - (b^2 - c^2)^2]}{2a^2b^2c^2 \cos A \cos B \cos C} =$$

$$= \frac{2\sum b^2c^2 - \sum a^4}{32R^2S \cos A \cos B \cos C}. \text{ Ținând seama de 21) și 22), vom obține:}$$

$$\sum \operatorname{tg} A = \frac{p^2r^2}{2R^2S \cos A \cos B \cos C} = \frac{2pr}{p^2 - 4Rr - r^2 - 4R^2}.$$

$$29) \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{\sum \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\prod \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{1}{\frac{r}{p}} = \frac{p}{r}.$$